Lógica en Acción

Capítulo 9: Demostraciones

http://www.logicinaction.org/

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

- Es un método por *refutación*.

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

- Es un método por *refutación*.
- No representa la forma en que la gente razona.

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

- Es un método por *refutación*.
- No representa la forma en que la gente razona.

Acerca de los **sistemas de derivación**.

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

- Es un método por *refutación*.
- No representa la forma en que la gente razona.

Acerca de los **sistemas de derivación**.

- Las demostraciones no son naturales (e.g., considere la demostración de $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$).

Los sistemas estudiados hasta ahora

Acerca de las tablas semánticas.

- Es un método por *refutación*.
- No representa la forma en que la gente razona.

Acerca de los **sistemas de derivación**.

- Las demostraciones no son naturales (e.g., considere la demostración de $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$).
- No facilitan razonamiento *condicional*.

La propiedad de *deducción*

La propiedad de *deducción*

$$\Sigma, \varphi \models \psi \qquad \text{si y solo si} \qquad \Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$$

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \to \varphi$.

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \rightarrow \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \rightarrow \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.
- Pero si podemos hacer suposiciones ...

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \to \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.
- Pero si podemos hacer suposiciones ...

$$1 \quad \varphi$$

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \to \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.
- Pero si podemos hacer suposiciones ...

1	φ	
2	φ	repetición 1

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \to \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.
- Pero si podemos hacer suposiciones ...

1	φ	
2	φ	`repetición 1`
3	$\varphi \to \varphi$	`deducción 1-2`

¿Como representar suposiciones?

Tratemos de demostrar $\varphi \to \varphi$.

- Usando el sistema de derivación del Capítulo 2, la demostración toma varios pasos.
- Pero si podemos hacer suposiciones ...

1	φ	
2	φ	`repetición 1`
3	$\varphi \to \varphi$	`deducción 1-2`

Esta es la idea detrás de la **regla de dedución**.

La regla de **deducción**

Supongamos que queremos demostrar $\varphi \to \psi$.

La regla de **deducción**

Supongamos que queremos demostrar $\varphi \rightarrow \psi$.

- Asumamos φ.

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \end{array}$$

La regla de **deducción**

Supongamos que queremos demostrar $\varphi \rightarrow \psi$.

- Asumamos φ.
- Si basados en esta suposición

$$\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \end{array}$$

La regla de **deducción**

Supongamos que queremos demostrar $\varphi \rightarrow \psi$.

- Asumamos φ.
- Si basados en esta suposición
- podemos demostrar ψ,

$$
\begin{array}{|l}
\varphi \\
\hline
\vdots \\
\psi
\end{array}
$$

La regla de **deducción**

Supongamos que queremos demostrar $\varphi \rightarrow \psi$.

- Asumamos φ.
- Si basados en esta suposición
- podemos demostrar ψ,
- entonces hemos demostrado $\varphi \rightarrow \psi$.

$$\dfrac{\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \texttt{deducción}$$

Recordemos

Los tres axiomas para la lógica proposicional.

Recordemos

Los tres axiomas para la lógica proposicional.

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Recordemos

Los tres axiomas para la lógica proposicional.

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

Recordemos

Los tres axiomas para la lógica proposicional.

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Demostryo los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \to (\psi \to \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

Demostryo los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

$$1 \quad \begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \end{array}$$

Demostryo los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

$$\begin{array}{ll} 1 & \quad \varphi \\ 2 & \qquad \psi \end{array}$$

Demostryo los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

1	φ	
2	$\quad\psi$	
3	$\quad\varphi$	repetición 1

Demostryo los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \to (\psi \to \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

1	φ	
2	$\quad \psi$	
3	$\quad \varphi$	`repetición 1`
4	$\psi \to \varphi$	`deducción 2-3`

Demostryo los axiomas (1)

El axioma

$$\varphi \to (\psi \to \varphi)$$

puede ser demostrado con *deducción*:

1	φ	
2	ψ	
3	φ	repetición 1
4	$\psi \to \varphi$	deducción 2-3
5	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$	deducción 1-4

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \to (\psi \to \chi)$

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

$$\begin{array}{ll} 1 & \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \\ 2 & \qquad \varphi \rightarrow \psi \end{array}$$

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

$$\begin{array}{ll} 1 & \varphi \to (\psi \to \chi) \\ 2 & \quad \varphi \to \psi \\ 3 & \qquad \varphi \end{array}$$

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	
2	$\quad \varphi \to \psi$	
3	$\quad\quad \varphi$	
4	$\quad\quad \psi$	modus ponens 3,2

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	
2	$\quad \varphi \to \psi$	
3	$\quad\quad \varphi$	
4	$\quad\quad \psi$	`modus ponens 3,2`
5	$\quad\quad \psi \to \chi$	`modus ponens 3,1`

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	
2	$\varphi \rightarrow \psi$	
3	φ	
4	ψ	`modus ponens 3,2`
5	$\psi \rightarrow \chi$	`modus ponens 3,1`
6	χ	`modus ponens 4,5`

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	
2	$\quad \varphi \to \psi$	
3	$\quad\quad \varphi$	
4	$\quad\quad \psi$	`modus ponens 3,2`
5	$\quad\quad \psi \to \chi$	`modus ponens 3,1`
6	$\quad\quad \chi$	`modus ponens 4,5`
7	$\quad \varphi \to \chi$	`deducción 3-6`

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\mid\ \varphi \to (\psi \to \chi)$	
2	$\mid\ \mid\ \varphi \to \psi$	
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \varphi$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \psi$	`modus ponens 3,2`
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \psi \to \chi$	`modus ponens 3,1`
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \chi$	`modus ponens 4,5`
7	$\mid\ \mid\ \varphi \to \chi$	`deducción 3-6`
8	$\mid\ (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	`deducción 2-7`

Demostryo los axiomas (2)

El axioma

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

puede ser demostrado con *modus ponens* y *deducción*:

1	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	
2	$\varphi \to \psi$	
3	φ	
4	ψ	`modus ponens 3,2`
5	$\psi \to \chi$	`modus ponens 3,1`
6	χ	`modus ponens 4,5`
7	$\varphi \to \chi$	`deducción 3-6`
8	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	`deducción 2-7`
9	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	`deducción 1-8`

Necesitamos mas

El axioma

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

no puede ser demostrado tan solo con *modus ponens* y *deducción*.

Necesitamos mas

El axioma

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

no puede ser demostrado tan solo con *modus ponens* y *deducción*.

Necesitamos una regla para trabajar con negaciones.

La regla de **refutación**

Supongamos que queremos demostrar φ.

La regla de **refutación**

Supongamos que queremos demostrar φ.

- Asumamos $\neg\varphi$.

$$\neg\varphi$$

La regla de **refutación**

Supongamos que queremos demostrar φ.

- Asumamos $\neg\varphi$.
- Si basados en esta suposición

$$\neg\varphi$$

$$\vdots$$

La regla de **refutación**

Supongamos que queremos demostrar φ.

- Asumamos $\neg\varphi$.
- Si basados en esta suposición
- podemos demostrar una contradicción $\bot$,

$$
\begin{array}{|l}
\neg\varphi \\
\hline
\vdots \\
\bot
\end{array}
$$

La regla de **refutación**

Supongamos que queremos demostrar φ.

- Asumamos $\neg\varphi$.
- Si basados en esta suposición
- podemos demostrar una contradicción $\bot$,
- entonces $\neg\varphi$ no puede ser verdadera

$$\begin{array}{|l} \neg\varphi \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array}$$

La regla de **refutación**

Supongamos que queremos demostrar φ.

- Asumamos $\neg\varphi$.
- Si basados en esta suposición
- podemos demostrar una contradicción $\bot$,
- entonces $\neg\varphi$ no puede ser verdadera
- por lo tanto, hemos demostrado φ.

$$\dfrac{\begin{array}{|l} \neg\varphi \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array}}{\varphi}\ \texttt{refutación}$$

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

$$\begin{array}{ll} 1 & \quad \neg\varphi \to \neg\psi \end{array}$$

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \to \neg\psi$
2	$\quad \psi$

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \to \neg\psi$
2	ψ
3	$\neg\varphi$

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	
2	ψ	
3	$\neg\varphi$	
4	$\neg\psi$	modus ponens 3,1

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\vert\ \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	
2	$\vert\ \vert\ \psi$	
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\varphi$	
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\psi$	`modus ponens 3,1`
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \bot$	`modus ponens 2,4`

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \to \neg\psi$	
2	$\quad \psi$	
3	$\quad\quad \neg\varphi$	
4	$\quad\quad \neg\psi$	`modus ponens 3,1`
5	$\quad\quad \bot$	`modus ponens 2,4`
6	$\quad \varphi$	`refutación 3-5`

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \to \neg\psi$	
2	ψ	
3	$\neg\varphi$	
4	$\neg\psi$	`modus ponens 3,1`
5	$\perp$	`modus ponens 2,4`
6	φ	`refutación 3-5`
7	$\psi \to \varphi$	`deducción 2-6`

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\mid\ \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	
2	$\mid\ \mid\ \psi$	
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\varphi$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\psi$	`modus ponens 3,1`
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \perp$	`modus ponens 2,4`
6	$\mid\ \mid\ \varphi$	`refutación 3-5`
7	$\mid\ \psi \rightarrow \varphi$	`deducción 2-6`
8	$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	`deducción 1-7`

Demostryo los axiomas (3)

El axioma

$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

puede ser demostrado con *modus ponens*, *deducción* y *refutación*:

1	$\neg\varphi \to \neg\psi$	
2	$\quad \psi$	
3	$\quad\quad \neg\varphi$	
4	$\quad\quad \neg\psi$	`modus ponens 3,1`
5	$\quad\quad \bot$	`modus ponens 2,4`
6	$\quad \varphi$	`refutación 3-5`
7	$\psi \to \varphi$	`deducción 2-6`
8	$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	`deducción 1-7`

En el paso 5, recuerde que $\neg\psi$ puede entenderse como una abreviación de $\psi \to \bot$.

Por lo tanto . . .

$$\frac{\varphi\ ,\ \varphi \to \psi}{\psi}\ \texttt{modus ponens}$$

$$\frac{\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}\ \texttt{deducción} \qquad \frac{\begin{array}{|l} \neg\varphi \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array}}{\varphi}\ \texttt{refutación}$$

Por lo tanto . . .

$$\frac{\varphi\ ,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ \texttt{modus ponens}$$

$$\frac{\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \texttt{deducción} \qquad \frac{\begin{array}{|l} \neg\varphi \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array}}{\varphi}\ \texttt{refutación}$$

Las reglas de *modus ponens*, *deducción* y *refutación* forman un sistema completo para la lógica proposicional.

Para facilitar el trabajo . . .

Para facilitar el trabajo ...

- El sistema de **deducción natural** introduce reglas para manipular todos los conectivos de una manera simple.

Para la implicación $\rightarrow$

Para la implicación $\rightarrow$

$$\frac{\varphi\ ,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ \texttt{modus ponens}$$

Para la implicación $\rightarrow$

$$\frac{\varphi\ ,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ \texttt{modus ponens}$$

$$\mathbf{E}_{\rightarrow}$$

Para la implicación $\rightarrow$

$$\frac{\varphi \;,\; \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$ `modus ponens`

$$\frac{\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}$$ `deducción`

$\mathbf{E}_{\rightarrow}$

Para la implicación $\rightarrow$

$$\frac{\varphi\ ,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ \texttt{modus ponens}$$

$$\frac{\begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \texttt{deducción}$$

$\mathbf{E}_{\rightarrow}$ $\mathbf{I}_{\rightarrow}$

Para la negación $\neg$

Para la negación ¬

$$\frac{\neg\varphi \, , \, \varphi}{\bot}$$

Para la negación ¬

$$\frac{\neg\varphi \,,\, \varphi}{\bot}$$

$\mathbf{E}_{\neg}$

Para la negación $\neg$

$$\frac{\neg\varphi \,,\, \varphi}{\bot}$$

$$\frac{\begin{array}{|l} \neg\varphi \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array}}{\varphi}\ \texttt{refutación}$$

$$\mathbf{E}_{\neg}$$

Para la negación ¬

$$\frac{\neg\varphi \;,\; \varphi}{\bot}$$

$$\frac{\begin{array}{|l} \neg\varphi \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array}}{\varphi} \quad \texttt{refutación}$$

$\mathbf{E}_{\neg}$	$\mathbf{I}_{\neg}$

Para la conjunción $\wedge$

Para la conjunción $\wedge$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

Para la conjunción $\wedge$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

$$\mathbf{E}_{\wedge}$$

Para la conjunción $\wedge$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

$$\mathbf{E}_{\wedge}$$

$$\frac{\varphi \, , \, \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

Para la conjunción $\wedge$

$\mathbf{E}_\wedge$	$\mathbf{I}_\wedge$
$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$	$\dfrac{\varphi \,,\, \psi}{\varphi \wedge \psi}$

Para la disyunción $\vee$

Para la disyunción $\vee$

$$
\dfrac{\varphi \vee \psi\,, \qquad \begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \chi \end{array} \qquad , \qquad \begin{array}{|l} \psi \\ \hline \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi}
$$

Para la disyunción $\vee$

$$\frac{\varphi \vee \psi\,, \qquad \begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \chi \end{array} \qquad , \qquad \begin{array}{|l} \psi \\ \hline \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi}$$

$$\mathbf{E}_{\vee}$$

Para la disyunción $\vee$

$$\dfrac{\varphi \vee \psi\,, \quad \begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \chi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{|l} \psi \\ \hline \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi}$$

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

$\mathbf{E}_{\vee}$

Para la disyunción $\vee$

$\mathbf{E}_\vee$	$\mathbf{I}_\vee$
$\dfrac{\varphi \vee \psi\ , \quad \begin{array}{\|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \chi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{\|l} \psi \\ \hline \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi}$	$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$

For *predicate* logic

Para presentar las reglas de *introducción* y *eliminación* para $\forall$ y $\exists$, necesitamos recordar dos definiciones.

For *predicate* logic

Para presentar las reglas de *introducción* y *eliminación* para $\forall$ y $\exists$, necesitamos recordar dos definiciones.

- **Variable ligada**.

For *predicate* logic

Para presentar las reglas de *introducción* y *eliminación* para $\forall$ y $\exists$, necesitamos recordar dos definiciones.

- **Variable ligada**.
- **Substitución de una variable por un término en una fórmula**.

Variable ligada

Variable ligada

- **Alcance de un cuantificador.** En una fórmula de la forma $\forall x \varphi$ ($\exists x \varphi$), la sub-fórmula φ se conoce como **el alcance** del cuantificador $\forall$ ($\exists$).

Variable ligada

- **Alcance de un cuantificador.** En una fórmula de la forma $\forall x\varphi$ ($\exists x\varphi$), la sub-fórmula φ se conoce como **el alcance** del cuantificador $\forall$ ($\exists$).
- **Variables ligada a cuantificadores.** En una fórmula de la forma $\forall x\varphi$ ($\exists x\varphi$), toda aparición de x en φ está **ligada al cuantificador** $\forall$ ($\exists$) siempre y cuando no esté ligada a otro cuantificador en φ.

Variable ligada

- **Alcance de un cuantificador.** En una fórmula de la forma $\forall x \varphi$ ($\exists x \varphi$), la sub-fórmula φ se conoce como **el alcance** del cuantificador $\forall$ ($\exists$).
- **Variables ligada a cuantificadores.** En una fórmula de la forma $\forall x \varphi$ ($\exists x \varphi$), toda aparición de x en φ está **ligada al cuantificador** $\forall$ ($\exists$) siempre y cuando no esté ligada a otro cuantificador en φ.
- **Variable ligada.** En una fórmula φ, una aparición de una variable x está **ligada** si existe un cuantificador en φ al que x esté ligada.

Substitución (1)

Substitución (1)

- **Substitución dentro de un término.** El **término** que resulta de reemplazar las apariciones de la variable y por el término t dentro del **término** s se denota como

$$(s)_t^y$$

Substitución (1)

- **Substitución dentro de un <u>término</u>.** El **término** que resulta de reemplazar las apariciones de la variable $\boldsymbol{y}$ por el término $\boldsymbol{t}$ dentro del **término** $\boldsymbol{s}$ se denota como

$$(s)^y_t$$

- Formalmente,

Dada una **constante** a: $\quad (c)^y_t := c$

Dada una **variable** x: $\quad \begin{cases} (x)^y_t := x & \text{para todo } x \text{ diferente de } y \\ (y)^y_t := t & \end{cases}$

Substitución (1)

- **Substitución dentro de un <u>término</u>.** El **término** que resulta de reemplazar las apariciones de la variable y por el término t dentro del **término** s se denota como

$$(s)^y_t$$

- Formalmente,

Dada una **constante** a: $(c)^y_t := c$

Dada una **variable** x: $\begin{cases} (x)^y_t := x & \text{para todo } x \text{ diferente de } y \\ (y)^y_t := t \end{cases}$

Ejemplos:

$$(a)^x_c := a$$
$$(x)^y_a := x$$
$$(z)^z_y := y$$

Substitución (2)

Substitución (2)

- **Substitución dentro de una fórmula.** La **fórmula** que resulta de reemplazar **las apariciones libres** de la variable $\boldsymbol{y}$ por el término $\boldsymbol{t}$ dentro de la **fórmula** $\boldsymbol{s}$ se denota como

$$(\varphi)_{t}^{y}$$

Substitución (2)

- **Substitución dentro de una <u>fórmula</u>.** La **fórmula** que resulta de reemplazar **las apariciones libres** de la variable $\boldsymbol{y}$ por el término $\boldsymbol{t}$ dentro de la **fórmula** $\boldsymbol{s}$ se denota como

$$(\varphi)_t^y$$

- Formalmente,

$$\begin{aligned} (P t_1 \cdots t_n)_t^y &:= P(t_1)_t^y \cdots (t_n)_t^y \\ (\neg\varphi)_t^y &:= \neg(\varphi)_t^y \\ (\varphi \wedge \psi)_t^y &:= (\varphi)_t^y \wedge (\psi)_t^y \\ (\varphi \vee \psi)_t^y &:= (\varphi)_t^y \vee (\psi)_t^y \\ (\varphi \rightarrow \psi)_t^y &:= (\varphi)_t^y \rightarrow (\psi)_t^y \\ (\varphi \leftrightarrow \psi)_t^y &:= (\varphi)_t^y \leftrightarrow (\psi)_t^y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (\forall x\varphi)_t^y := \forall x(\varphi)_t^y \\ (\forall y\varphi)_t^y := \forall y\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\exists x\varphi)_t^y := \exists x(\varphi)_t^y \\ (\exists y\varphi)_t^y := \exists y\varphi \end{cases}$$

Para el cuantificador universal ∀

Para el cuantificador universal ∀

$$\frac{\forall x\, \varphi}{(\varphi)^{x}_{t}}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

Para el cuantificador universal $\forall$

$$\frac{\forall x\, \varphi}{(\varphi)^x_t}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

$\mathbf{E}_\forall$

Para el cuantificador universal $\forall$

$$\frac{\forall x\, \varphi}{(\varphi)^x_t}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

$$\begin{array}{l} u \;\big|\; \\ \quad\vdots \\ \quad(\varphi)^x_u \\ \hline \forall x\, \varphi \end{array}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

$\mathbf{E}_\forall$

Para el cuantificador universal $\forall$

$$\frac{\forall x\, \varphi}{(\varphi)^x_t}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

$\mathbf{E}_\forall$

$$\begin{array}{l} u \;\Big|\; \quad \vdots \\ \qquad (\varphi)^x_u \\ \hline \qquad \forall x\, \varphi \end{array}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

$\mathbf{I}_\forall$

Para el cuantificador existencial ∃

Para el cuantificador existencial ∃

$$\dfrac{\exists x\,\varphi\;, \qquad \begin{array}{r|l} u & (\varphi)^x_u \\ \hline & \vdots \\ & \psi \end{array}}{\psi}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

Para el cuantificador existencial $\exists$

$$\dfrac{\exists x\,\varphi\;, \qquad \begin{array}{c|l} u & (\varphi)^x_u \\ \hline & \vdots \\ & \psi \end{array}}{\psi}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

$\mathbf{E}_\exists$

Para el cuantificador existencial $\exists$

$$\dfrac{\exists x\, \varphi\ , \qquad \begin{array}{r|l} u & (\varphi)^x_u \\ \hline & \vdots \\ & \psi \end{array}}{\psi}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

$\mathbf{E}_\exists$

$$\dfrac{(\varphi)^x_t}{\exists x\, \varphi}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

Para el cuantificador existencial $\exists$

$$\cfrac{\exists x\,\varphi\ , \qquad \begin{array}{l|l} u & (\varphi)^x_u \\ \hline & \vdots \\ & \psi \end{array}}{\psi}$$

donde u es un símbolo especial que no aparece en otro lugar durante la demostración

$\mathbf{E}_\exists$

$$\frac{(\varphi)^x_t}{\exists x\,\varphi}$$

siempre y cuando ninguna variable en t aparezca ligada en φ

$\mathbf{I}_\exists$

Para el símbolo de igualdad =

Para el símbolo de igualdad =

$$\frac{t_1 = t_2 \ , \varphi}{\varphi_{[t_1/t_2]}}$$

$$\frac{t_1 = t_2 \ , \varphi}{\varphi_{[t_2/t_1]}}$$

donde $\varphi_{[t_1/t_2]}$ es el resultado de remplazar, en φ, algunas apariciones de t_2 por t_1, siempre y cuando

Para el símbolo de igualdad =

$$\frac{t_1 = t_2 \ , \ \varphi}{\varphi_{[t_1/t_2]}}$$

$$\frac{t_1 = t_2 \ , \ \varphi}{\varphi_{[t_2/t_1]}}$$

donde $\varphi_{[t_1/t_2]}$ es el resultado de remplazar, en φ, algunas apariciones de t_2 por t_1, siempre y cuando

- t_2 contenga solo variables que aparecen libres en φ, y

Para el símbolo de igualdad =

$$\frac{t_1 = t_2 \ , \varphi}{\varphi_{[t_1/t_2]}}$$

$$\frac{t_1 = t_2 \ , \varphi}{\varphi_{[t_2/t_1]}}$$

donde $\varphi_{[t_1/t_2]}$ es el resultado de remplazar, en φ, algunas apariciones de t_2 por t_1, siempre y cuando

- t_2 contenga solo variables que aparecen libres en φ, y
- t_1 contenga solo variables que no no se vuelven ligada después de la substitución.

Para el símbolo de igualdad $=$

$$\frac{t_1 = t_2 \ , \ \varphi}{\varphi_{[t_1/t_2]}}$$

$$\frac{t_1 = t_2 \ , \ \varphi}{\varphi_{[t_2/t_1]}}$$

donde $\varphi_{[t_1/t_2]}$ es el resultado de remplazar, en φ, algunas apariciones de t_2 por t_1, siempre y cuando

- t_2 contenga solo variables que aparecen libres en φ, y
- t_1 contenga solo variables que no no se vuelven ligada después de la substitución.

$$\mathbf{E}_=$$

Para el símbolo de igualdad $=$

$$\frac{t_1 = t_2 \ , \ \varphi}{\varphi[t_1/t_2]}$$

$$\frac{t_1 = t_2 \ , \ \varphi}{\varphi[t_2/t_1]}$$

$$\frac{}{t = t}$$

donde $\varphi[t_1/t_2]$ es el resultado de remplazar, en φ, algunas apariciones de t_2 por t_1, siempre y cuando

- t_2 contenga solo variables que aparecen libres en φ, y
- t_1 contenga solo variables que no no se vuelven ligada después de la substitución.

para cualquier término t.

$\mathbf{E}_=$

Para el símbolo de igualdad $=$

$$\frac{t_1 = t_2 \, , \, \varphi}{\varphi_{[t_1/t_2]}}$$

$$\frac{t_1 = t_2 \, , \, \varphi}{\varphi_{[t_2/t_1]}}$$

donde $\varphi_{[t_1/t_2]}$ es el resultado de remplazar, en φ, algunas apariciones de t_2 por t_1, siempre y cuando

- t_2 contenga solo variables que aparecen libres en φ, y
- t_1 contenga solo variables que no no se vuelven ligada después de la substitución.

$\mathbf{E}_=$

$$\frac{}{t = t}$$

para cualquier término t.

$\mathbf{I}_=$